0.1 Derived Fanctor

モデル圏間の関手 $F : C \longrightarrow D$ が weak equivalence を保つかどうかというのは重要な疑問である。もし保つとするならば $F' : \mathrm{Ho}(C) \longrightarrow \mathrm{Ho}(D)$ が導かれ、$\gamma_D \circ F = F' \circ \gamma_C$ を満たす。

逆にこういった関手 $F' : \mathrm{Ho}(C) \longrightarrow \mathrm{Ho}(D)$ が誘導されたなら、F は weak equivalence を保つ。だが、$\gamma_D \circ F = F' \circ \gamma_C$ を満たす関手を探すのは大変な事である。よってそれに準じる derived fanctor というものを考える。これが存在しただけは weak equivalence を保存するとは言いがたいのだが、ある条件を満たしたときにはそれを可能とする。

Definition 0.1.1

C を model category とする。関手 $F : C \longrightarrow D$ に対し、F の left derived fanctor とは、

$$\mathbf{L}F : \mathrm{Ho}(C) \longrightarrow D\ ,\ t : \mathbf{L}F \circ \gamma \longrightarrow F$$

という関手と自然変換の組 $(\mathbf{L}F, t)$ であり、次の universal form the left という条件を満たす。

同じく

$$G : \mathrm{Ho}(C) \longrightarrow D \quad , \quad s : G \circ \gamma \longrightarrow F$$

という関手と自然変換に対し、自然変換 $s' : G \longrightarrow \mathbf{L}F$ が一意に存在し、

$$s = t \circ s'\gamma : G \circ \gamma \longrightarrow \mathbf{L}F \circ \gamma \longrightarrow F$$

を満たす。

同じようにして、F の right derived fanctor とは、

$$\mathbf{R}F : \mathrm{Ho}(C) \longrightarrow D\ ,\ t : F \longrightarrow \mathbf{R}F \circ \gamma$$

という関手と自然変換の組 $(\mathbf{R}F, t)$ であり、次の universal form the right という条件を満たす。

本来 left(right) derived fanctor というのは、$(\mathbf{L}F, t), (\mathbf{R}F, t)$ という組であるが、自然変換がはっきりしている場合には省く場合がある。univarsal propaty が言う事の意味は、$\mathbf{L}F, \mathbf{R}F$ の一意性である。

Remmark 0.1.2

C を model category とする。$F : C \longrightarrow D$ に対し、F の left(right) derived fanctor が存在すれば、それは natural equivalence を除いて一意に定まる。

proof)　　$(\mathbf{L}F, t)$, $(\mathbf{L}F', s)$ を F の 2 つの left derived fanctor とする。このとき、$t' : \mathbf{L}F \longrightarrow \mathbf{L}F'$, $s' : \mathbf{L}F' \longrightarrow \mathbf{L}F$ が一意に存在し、

$$t = s \circ t'\gamma : \mathbf{L}F \circ \gamma \longrightarrow F \quad , \quad s = t \circ s'\gamma : \mathbf{L}F' \circ \gamma \longrightarrow F$$

を満たす。このとき、

$$t = t \circ s'\gamma \circ t'\gamma = t \circ (s' \circ t')\gamma$$

であり、同時に $t = t \circ 1\gamma$ であるので、s', t' の一意性により $s' \circ t' = 1$ である。$t' \circ s' = 1$ も言える。

$\square$

Proposition 0.1.3

C を model category とする。$F : C \longrightarrow D$ は cofibrant object 間の weak equivalence を D の isomorphism に移すとする。このとき、F の left derived fanctor である $(\mathbf{L}F, t)$ が存在する。また、このとき cofibrant な X に対し、$t_X : \mathbf{L}F \circ \gamma(X) = \mathbf{L}F(X) \longrightarrow F(X)$ は同型である。

双対的に、fibrant object 間の weak equivalence を D の isomorphism に移すとすると、right derived fanctor が存在する。

proof)　　$f \overset{r}{\sim} g :$ Cofibrant $\longrightarrow$ Cofibrant とすると、以前の Lemma から $F(f) = F(g)$ となることがわかる。よって、$F' :_\pi C_c \longrightarrow D$ が誘導される。$Q : C \longrightarrow_\pi C_c$ を合成し、

$$F' \circ Q : C \longrightarrow D$$

を考えると、これは weak equivalence を同型射に移す事がわかる。これより、

$$\mathbf{L}F : \mathrm{Ho}(C) \longrightarrow D$$

が誘導される。また、natural transformation

$$t : \mathbf{L}F \circ \gamma \longrightarrow F$$

は、$t_X = F(p_X) : \mathbf{L}F \circ \gamma(X) = F \circ Q(X) \longrightarrow F(X)$ で定義すればよい。X が cofibrant ならば、$QX = X$ と考えられる。よって、t_X は恒等射と考えられる。正確には同型射になる。

最後に universal form the left を確かめる。(G, s) を $\mathrm{Ho}(C) \longrightarrow D$, $G \circ \gamma \longrightarrow F$ の関手と自然変換の組とする。このとき、

$$s' : G \longrightarrow \mathbf{L}F$$

を、$s'_X = s_{QX} \circ G(\gamma p_X)^{-1} : G(X) \longrightarrow G \circ Q(X) \longrightarrow \mathbf{L}F(X) = F \circ Q(X)$ で定義すれば、$(t \circ s'\gamma)_X = s_X : G \circ \gamma(X) \longrightarrow F(X)$ である。right derived fanctor も同様である。

□

Definition 0.1.4

C, D をモデル圏とし、関手 $F : C \longrightarrow D$ の total left derived fanctor とは、

$$\gamma_D \circ F : C \longrightarrow \mathrm{Ho}(D)$$

の left derived fanctor のことである。同様に、F の total right derived fanctor は

$$\gamma_D \circ F : C \longrightarrow \mathrm{Ho}(D)$$

の right derived fanctor である。

Remmark 0.1.5

C, D をモデル圏とし、関手 $F : C \longrightarrow D$ は C における (co)fibrant object 間の weak equivalence を D の weak equivalence に移すとする。このとき、F の total (left)right derived fanctor が存在する。

proof) $\gamma_D : D \longrightarrow \mathrm{Ho}(D)$ は weak equivalence を同型に移したので、Prop 0.1.3 により成立する。

□

K.Brown はこの仮定をより簡略化した。

Lemma 0.1.6

C, D をモデル圏とし、関手 $F : C \longrightarrow D$ は C における (co)fibrant object 間の acyclic (co)fibration を D の weak equivalence に移す。このとき、C における (co)fibrant object 間の weak equivalence を D の weak equivalence に移す。

proof)　$f : A \longrightarrow B$ を cofibrant 間の weak equivalence とする。このとき、$f + 1_B : A \coprod B \longrightarrow B$ を MC5 を用いて次のように分解する。

$$f + 1_B : A \coprod B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{p} B$$

ここで、j : cofibration で p : acyclic fibration である。A, B および C は cofibrant であるので、

$$j \circ i_0 : A \longrightarrow C, j \circ i_1 : B \longrightarrow C$$

は cofibrant 間の cofibration である。さらに、$f, 1_B, p$ が weak equivalence であり MC2 により、$j \circ i_0, j \circ i_1$ が weak equivalence である。仮定より、$F(j \circ i_0), F(j \circ i_1)$ が weak equivalence となる。また、$F(p \circ j \circ i_1) = F(1_B) = 1$ で weak equivalence なので、MC2 により $F(p)$ が weak equivalence。よって、

$$F(f) = F(p \circ j \circ i_0) = F(p) \circ F(j \circ i_0)$$

により weak equivalence である。

□

Remmark 0.1.7

C, D をモデル圏とし、関手 $F : C \longrightarrow D$ は C における (co)fibrant object 間の acyclic (co)fibration を D の weak equivalence に移すとする。このとき、F の total (left)right derived fanctor が存在する。

total left derived fanctor の存在は weak equivalence の保存ではなく、cofibrant object 間の acyclic cofibration を weak equivalence に移すかどうか確認すればよい。

Theorem 0.1.8

C, D をモデル圏とし、$F : C \Longleftrightarrow D : G$ とする。

1)　F は cofibration を保ち、G は fibration を保つとする。

このとき、total derived fanctor である $\mathbf{L}F, \mathbf{R}F$ が存在し、

$$\mathbf{L}F : \mathrm{Ho}(C) \Longleftrightarrow \mathrm{Ho}(D) : \mathbf{R}G$$

となる。さらに加えて、

2)　C の cofibrant object である A と、D の fibrant object である X に対し、$f : A \longrightarrow G(X)$ が C の weak equivalence であることと、$f^\flat : F(A) \longrightarrow X$ が D の weak equivalence であることが同値であるとする。ただし、$f^\flat$ は f の随伴である。

このとき、$\mathbf{R}F$ と $\mathbf{L}F$ は inverce equivalence of category である。(つまり $\mathbf{L}F \circ \mathbf{R}F$ と $\mathbf{R}F \circ \mathbf{L}F$ はそれぞれ identity fanctor と naturaly equivalent となる)

この証明に入る前に次の Lemma を考えておく。

Lemma 0.1.9

上記の Theorem の状況において 1) の仮定は次の条件と同値である。

1)'　F は cofibration と acyclic cofibration を保つ。

1)"　G は fibration と acyclic fibration を保つ。

proof)　1) $\Longrightarrow$ 1)' を示す。$i : A \longrightarrow B$ を C における acyclic cofibration とする。このとき、D の任意の fibration である $p : X \longrightarrow Y$ と可換図式、

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "F(i)"'] & X \arrow[d, "p"] \\ F(B) \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

を考える。この図式が lift を持てばよい。それには、この図式の随伴を考えれば

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha^\flat"] \arrow[d, "i"'] & G(X) \arrow[d, "G(p)"] \\ B \arrow[r, "\beta^\flat"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

で G は fibration を保つので $G(p)$ は fibration である。i が acyclic cofibration であるので、この図式は lift をもつ。それを $f : B \longrightarrow G(X)$ とおくと、その随伴 $f^{\flat} : F(B) \longrightarrow X$ が求める lift である。これより、$F(i)$ が acyclic cofibration である。逆も同様であり、1)" でも同じことが言える。

□

proof of Th 0.1.8) Lemma 0.1.9 により、F が acyclic cofibration を保ち、G が acyclic fibration を保つので、Remmark 0.1.7 の仮定を満たすため、total derived fanctor である $\mathbf{L}F, \mathbf{R}F$ は存在する。あとはこれらが Adjoin pair であることを示せばよい。$F : C \Longleftrightarrow D : G$ という事は F が colimit を保ち、G が limit を保つという事である。よって、F は inicial object を保ち、G は terminal object を保つ。さらに、F が cofibration を保ち、G が fibration を保つのだから、F は cofibrant を cofibrant へ、G は fibrant を fibrant へ移す。よって、C の cofibrant object である A と、D の fibrant object である X に対して、

$$\mathrm{Hom}_C(A, G(X)) \cong \mathrm{Hom}_D(F(A), X)$$

の同型があり、left or right homotopic は随伴でも保存されるため、

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(C)}(A, G(X)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(D)}(F(A), X)$$

が導かれる。任意の $\mathrm{Ho}(C)$ の object である A と、$\mathrm{Ho}(D)$ の object である X に対し、

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(C)}(A, \mathbf{R}G(X)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(C)}(A, G(RX)) \stackrel{\gamma(p_A)^*}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(C)}(QA, G(RX))$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(D)}(F(QA), RX) \stackrel{(\gamma(i_X)^{-1})_*}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(D)}(F(QA), X) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(D)}(\mathbf{L}F(A), X)$$

という同型を考えれば、これにより

$$\mathbf{L}F : \mathrm{Ho}(C) \Longleftrightarrow \mathrm{Ho}(D) : \mathbf{R}G$$

となる。

また 2) の条件を満たすとする。A を C の cofibrant object とすると、

$$i_{F(A)} : F(A) \stackrel{\sim}{\longrightarrow} RF(A)$$

において $RF(A)$ は D の fibrant であるから仮定よりこの随伴、

$$i^{\sharp}_{F(A)} : A \stackrel{\sim}{\longrightarrow} GRF(A)$$

は C の weak equivalence である。よってここで、Ho(C) において、

$$\epsilon_A = 1^\sharp_{\mathbf{L}F(A)} : A \longrightarrow \mathbf{R}G(\mathbf{L}F(A))$$

を考えると、A は cofibrant であるから、$\mathbf{R}G(\mathbf{L}F(A)) = GRFQ(A) = GRF(A)$ である。よって、$\epsilon_A = \gamma(i^\sharp_{F(A)})$ なので、ϵ_A は Ho(C) の同型である。今、Ho(C) の任意の object はある (co)fibrant object と同型になるので、ϵ_A は任意の object に対して同型となる。つまり、$\mathbf{R}G \circ \mathbf{L}F$ は identity fanctor と natural equivalence である。双対的に $\mathbf{L}F \circ \mathbf{R}G$ も identity fanctor と natural equivalence になる。

$\square$

注） fibranbt replacement の RX と right derived fanctor の $\mathbf{R}F$ を混同しないように。